

# Mnogokomponentni hidrodinamički modeli

## Mnogokomponentni hidrodinamički modeli

- Fizički znatno realističniji modeli kod plazme nego MHD.
- **Zašto?**
- *U jednom takvom modelu plazma se poistovećuje sa smešom fluida, i to tako da se svaka prisutna komponentna tretira kao poseban fluid.*
- *Čitav niz efekata se može uzeti u obzir, kao na primer:*
  - *specifičnost interakcije između elektrona i teških čestica, uslovljenoj velikom razlikom u masama.*
  - *mnogokomponentni model dozvoljava da se opišu posledice okolnosti da u jednoj istoj tački prostora pojedine komponente plazme mogu imati različite brzine, što može biti praćeno pojavom specifičnog unutrašnjeg trenja (koje treba razlikovati od viskoznosti).*
  - *mogu se uzeti u obzir i pojave uslovljene činjenicom da pojedine komponente u istoj tački imaju različite temperature, itd.*

# Osnovne jednačine za svaki mnogokomponentni model

- Hidrodinamičke jednačine, analogne jednačinama u MHD, pišu se za svaku komponentu plazme ponaosob.

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \zeta_\alpha,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot \{\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha\} = \\ & = \rho_\alpha \mathbf{f}_\alpha - \nabla p_\alpha + e_\alpha n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) + \mu_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha + \left( \lambda_\alpha + \frac{1}{3} \mu_\alpha \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha) + \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{Z}_\alpha \zeta_\alpha, \end{aligned}$$

$$p_\alpha = F_\alpha(\rho_\alpha).$$

# Analiza jednačina

- indeks  $\alpha$  označava komponentu plazme (vrstu čestica) o kojoj je reč.
- U jednačinama kontinuiteta za pojedine komponente desne strane nisu jednake nuli, za razliku od obične hidrodinamičke jednačine kontinuiteta.
- Veličina  $\zeta_\alpha$  simbolizira povećanje gustine te vrste čestica u jedinici vremena usled neelastičnih sudara, jer zbog njih se ove gustine mogu menjati.
- U jednačinama kretanja treba zapaziti dve izmene u odnosu na korespondentnu jednačinu u MHD.
- Izraz za Lorenc-ovu silu je drugačiji, jer je plazma elektroneutralna *samo kao celina*, a svaka komponenta zasebno posmatrana ima izvesnu gustinu prostornog naelektrisanja različitu od nule.

# nastavak

- U jednačinama kretanja se pojavljuju dve nove zapreminske sile, označene simbolički sa  $\mathbf{R}_\alpha$  i  $\mathbf{Z}_\alpha \zeta_\alpha$ .
- Prva od njih,  $\mathbf{R}_\alpha$ , prikazuje silu trenja kojoj su izložene čestice posmatrane vrste usled toga što njihova srednja brzina kretanja  $\mathbf{v}_\alpha$  nije jednaka srednjim brzinama kretanja ostalih komponentata plazme. Drugim rečima, ovaj član predstavlja uticaj *elastičnih* sudara na promenu gustine impulsa čestica vrste  $\alpha$  u jedinici vremena.
- Drugi član,  $\mathbf{Z}_\alpha \zeta_\alpha$ , označava analognu promenu usled neelastičnih sudara, jer oni dovode ne samo do promene broja čestica određene vrste u plazmi, već i do promene njihove gustine impulsa.

# Konkretizacija veličina $\mathbf{R}_\alpha$ i $\mathbf{Z}_\alpha \zeta_\alpha$

- Konkretizacija veličina  $\mathbf{R}_\alpha$  i  $\mathbf{Z}_\alpha \zeta_\alpha$ , dakle izbor konkretnog mnogokomponentnog hidrodinamičkog modela, moguće je izvršiti tek kad se poznaju svi elastični i neelastični procesi koji se odigravaju u posmatranoj plazmi.

- Zakoni konzervacije mase i impulsa zahtevaju da bude

$$\sum_{\alpha} \zeta_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha} \zeta_{\alpha} = 0.$$

jer se ukupna masa i ukupni impuls jedinice zapremine plazme ne menja pri sudarima.

- Za gustinu struje se uzima

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$$

tako da hidrodinamičke jednačine i Maksvel-ove jednačine obrazuju zatvoreni sistem jednačina.

- Dakle, suprotno situaciji kod MHD, nije potrebno pretpostaviti bilo kakav oblik Om-ovog zakona.

# Razlika između MHD i nekog hidrodinamičkog modela

- Uvođenjem *makroskopskih (globalnih) veličina* za plazmu kao *celinu* mogu se uočiti razlike između MHD i nekog hidrodinamičkog modela.
- Gustina plazme  $\rho$ , makroskopska brzina  $\mathbf{V}$ , ukupni pritisak  $p$  i efektivna zapreminska sila  $\mathbf{f}$  su takve makroskopske veličine i mogu se uvesti relacijama

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad \rho \mathbf{V} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad \rho \mathbf{f} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{f}_{\alpha}$$

- Za svaku komponentu plazme možemo uvesti još i tzv. *difuznu brzinu*

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{V}$$

koja očividno predstavlja relativnu brzinu kretanja te komponente u sistemu reference koji se u odnosu na lab sistem reference kreće makroskopskom brzinom plazme.

# Globalne jednačine

- Saberemo li sve jednačine kontinuiteta i sve jednačine kretanja, dobija se sledeći rezultat:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{V}, \mathbf{V}\} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot \{\rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}, \mathbf{w}_{\alpha}\} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \\ + \left( \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \right) \Delta \mathbf{V} + \sum_{\alpha} \left[ \left( \lambda_{\alpha} + \frac{1}{3} \mu_{\alpha} \right) \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \sum_{\alpha} \left[ \mu_{\alpha} \Delta \mathbf{w}_{\alpha} + \left( \lambda_{\alpha} + \frac{1}{3} \mu_{\alpha} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}_{\alpha}) \right] \end{aligned}$$

- Zaključak: između jednokomponentnog i mnogokomponentnog modela postoji razlika u opisivanju kretanja plazme. Ta razlika je sadržana u poslednjim članovima leve i desne strane jednačine kretanja i uslovljena je postojanjem difuznih brzina, tj. okolnošću da se različite komponente plazme kreću različitim brzinama u istoj tački prostora.